Mecânica Geral - 2011.2 - IF-UFF - Lista de exercícios n. 8

Ernesto Galvão
(Dated: November 7, 2011)

I. PROBLEMAS DA LISTA

1. Duas massas iguais no plano, presas por mola. Considere duas partículas de massas iguais ($m_1 = m_2 = m$), presas uma à outra por uma mola sem massa, retilínea, de constante elástica k e comprimento L quando relaxada. As partículas estão livres para se movimentar sem atrito sobre uma mesa horizontal.
a) Escreva a Lagrangeana em termos das coordenadas $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, e reescreva a Lagrangeana usando as coordenadas do CM $\vec{R}$ e coordenada relativa $\vec{r}$, usando coordenadas polares (r, ϕ) para $\vec{r}$.
b) Escreva e resolva as equações do movimento para as coordenadas do CM X e Y.
c) Escreva as equações de Lagrange para r e ϕ. Resolva-as para os dois casos especiais: i) r constante; ii) ϕ constante. Descreva os movimentos correspondentes a essas soluções particulares. Calcule a frequência de oscilações em r no caso de ϕ constante.

2. Órbitas para potencial de Hooke. Considere duas partículas que interagem por força correspondente ao potencial de Hooke, $U = \frac{1}{2}kr^2$, onde $\vec{r}$ é a posição relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, e não há forças externas.
a) Mostre que $\vec{r}(t)$ descreve uma elipse.
b) Mostre que cada partícula se move em uma elipse em torno do CM do par. Essa segunda parte é meio complicada. Dicas: escolha o plano xy como o plano do movimento, resolvendo a equação do movimento para x e y. Sua solução terá a forma $x = Acos(\omega t) + Bsen(\omega t)$, com uma expressão similar para y. Isole $sen(\omega t)$ e $cos(\omega t)$ e use $cos^2 + sen^2 = 1$. Voce deve conseguir colocar a equação de órbita na forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$, com $k > 0$. Então use o resultado conhecido: se a e c são positivos e $ac > b^2$, essa equação descreve uma elipse.

3. Estabilidade de órbitas circulares. a) Use o potencial efetivo (eq. 8.32 do Taylor) para achar o raio da órbita circular em torno do Sol de um cometa de momento angular l. [Examine dU_{ef}/dr.]
b) Mostre que essa órbita circular é estável, no sentido de que um pequeno empurrão na direção radial resultará em pequenas oscilações no raio. [Dica: examine d^2U_{ef}/dr^2.]
c) Mostre que o período de pequenas oscilações será igual ao período orbital do cometa.

4. Cometa em queda livre para o Sol.
Largamos um cometa a uma distância r_{max} do Sol, em queda livre, ou seja, sem momento angular l.
a) Use a técnica ilustrada pela equação 4.58 do Taylor para encontrar o tempo que o cometa demora para chegar ao Sol (despreze o raio do Sol).
b) Se o cometa pudesse passar através do Sol, descreva o movimento que ele faria, e calcule o período desse movimento.

II. OUTROS PROBLEMAS RECOMENDADOS

Taylor cap. 8: 7, 8, 9, 14, 16, 17, 20, 21. Teremos mais problemas do cap. 8 na próxima lista.